Probă scrisă la MATEMATICĂ
Sesiunea iunie-iulie 2006

Proba F.Programa M2. Filiera vocațională, profil Artistic, sp.: Arhitectură, arte ambientale şi design ; profil Militar sp. Ştiințe sociale. Filiera teoretică, sp. Ştiințe sociale;
NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore. **Varianta 3**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze distanța de la punctul $A(5,4)$ la punctul $B(2,6)$.

(4p) **b)** Să se determine $a,b \in \mathbf{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $(2-i)(4+i)=a+bi$.

(4p) **c)** Să se calculeze aria unui triunghi echilateral cu latura de lungime 6.

(4p) **d)** Să se determine conjugatul numărului complex $-4+5i$.

(2p) **e)** Să se determine $a,b \in \mathbf{R}$, astfel încât punctele $A(5,4)$ şi $B(4,5)$ să fie pe dreapta de ecuație $x+ay+b=0$.

(2p) **f)** Dacă în triunghiul ABC, $AB=4, AC=5$ şi $m\left(\widehat{BAC}\right)=\frac{\pi}{2}$, să se calculeze BC.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}$.

(3p) **b)** Să se calculeze probabilitatea ca un element $n \in \{1,2,3,4,5\}$ să verifice relația $5^n < 29$.

(3p) **c)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $9^x - 3 = 0$.

(3p) **d)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale strict pozitive ecuația $log_2 x = 3$.

(3p) **e)** Să se determine câtul şi restul împărțirii polinomului $f = X^4 + X^2 + 1$ la polinomul $g = X^2 - X + 1$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^6}$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x),\ x \in \mathbf{R}^*$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

(3p) **c)** Să se determine ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f.

(3p) **d)** Să se calculeze $\int_1^2 f(x)dx$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left((n^6+1)\cdot f(n)\right)$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 9 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 9 & -2\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ şi funcţia

$f:\left(\frac{1}{3},\infty\right)\to\left(\frac{1}{3},\infty\right)$, $f(x)=\frac{4x-1}{9x-2}$.

(4p) **a)** Să se verifice că $A+I_2=B$.

(4p) **b)** Să se arate că $A^2=O_2$.

(4p) **c)** Să se calculeze matricea B^2.

(2p) **d)** Să se arate că, dacă $x>\frac{1}{3}$, atunci $\frac{4x-1}{9x-2}>\frac{1}{3}$.

(2p) **e)** Să se calculeze $(f\circ f)(x)$, $x\in\left(\frac{1}{3},\infty\right)$.

(2p) **f)** Utilizând metoda inducţiei matematice, să se arate că $B^n=I_2+nA$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$**.**

(2p) **g)** Să se arate că $\underbrace{(f\circ f\circ\ldots\circ f)}_{de\ n\ ori\ f}(x)=\frac{(3n+1)x-n}{9nx+1-3n}$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$**,** $\forall x>\frac{1}{3}$ **.**

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră mulţimea $A=\mathbf{R}-\{1,2,3\}$ şi funcţiile $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$, $g(x)=f'(x)$, $h(x)=g'(x)$ şi $u:\mathrm{A}\to\mathbf{R}$,

$u(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}$.

(4p) **a)** Să se calculeze $u'(x)$, $x\in A$.

(4p) **b)** Să se arate că $g(x)=f(x)\cdot u(x)$, $\forall x\in A$.

(4p) **c)** Să se arate că $u'(x)<0$, $\forall x\in A$.

(2p) **d)** Să se arate că $u'(x)=\frac{f(x)\cdot h(x)-g^2(x)}{f^2(x)}$, $\forall x\in A$.

(2p) **e)** Să se determine ecuaţia asimptotei către $+\infty$ la graficul funcţiei u .

(2p) **f)** Să se calculeze $\int_4^5 u(x)dx$.

(2p) **g)** Să se arate că $g^2(x)>h(x)\cdot f(x)$, $\forall x\in\mathbf{R}$