Probă scrisă la MATEMATICĂ
Sesiunea iunie-iulie 2006

M3:Proba f. Filiera Teoretică,sp.Filologie; Filiera Vocaţională:profil Artistic, sp.:Arte plastice şi decorative, Coregrafie, Muzică şi Teatru;profil Pedagogic, toate specializările cu excepţia învăţător-educatoare;profil Educaţie fizică şi sport ;profil Militar, sp. Muzici militare; profil Teologic, toate specializările

NOTĂ.Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.Timp de lucru efectiv 3 ore. Varianta 3

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluţii complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2x^2 + 7x - 9 = 0$.

(4p) **b)** Să se rezolve în mulţimea numerelor reale inecuaţia $2x^2 + 7x - 9 < 0$.

(4p) **c)** Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^x - 2 = 0$.

(4p) **d)** Să se rezolve în mulţimea numerelor reale, strict pozitive ecuaţia $\log_3 x = 1$.

(2p) **e)** Să se calculeze suma $S = C_7^0 - C_7^1 + C_7^6 - C_7^7$.

(2p) **f)** Să se compare numerele 1,75 şi $\sqrt{3}$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se scrie un număr raţional cuprins între numerele $\sqrt{\frac{4}{3}}$ şi $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

(3p) **b)** Să se scrie toate elementele din mulţimea $\{11, 12, ..., 25\}$ care **nu** se divid cu 4.

(3p) **c)** Dacă $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, d, e\}, C = \{a, d, f\}$ să se calculeze mulţimea $A \cup (B \cap C)$.

(3p) **d)** Să se calculeze produsul primelor 10 zecimale ale numărului $\sqrt{145}$.

(3p) **e)** Să se scrie toate numerele **pare** de 3 cifre care se pot forma utilizând numai cifre din mulţimea $\{2, 3\}$.

2. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC cu catetele $AB = 9$ şi $AC = 40$.
Piciorul perpendicularei din A pe latura BC se notează cu D.

(3p) **a)** Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC.

(3p) **b)** Să se calculeze lungimea înălţimii AD a triunghiului ABC.

(3p) **c)** Să se calculeze aria triunghiului ABC.

(3p) **d)** Să se calculeze lungimea medianei din A a triunghiului ABC.

(3p) **e)** Să se calculeze lungimea segmentului BD.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră un triunghi ABC şi dreapta (d) care intersectează segmentele (AC) în E, (AB) în F şi prelungirea laturii BC în D. Picioarele perpendicularelor din A, B, C pe dreapta (d) se notează cu M, N, P. Segmentele (CF) şi (BE) se intersectează în punctul Q, iar dreapta AQ intersectează segmentul (BC) în punctul G.

(4p) **a)** Să se arate că $\frac{FA}{FB} = \frac{AM}{BN}$.

(4p) **b)** Să se arate că $\frac{EC}{EA} = \frac{CP}{AM}$.

(4p) **c)** Să se arate că $\frac{DB}{DC} = \frac{BN}{CP}$.

(2p) **d)** Să se arate că $\frac{FA}{FB} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{DB}{DC} = 1$.

(2p) **e)** Să se arate că $\frac{AE}{EC} = \frac{AQ}{QG} \cdot \frac{BG}{BC}$.

(2p) **f)** Să se arate că $\frac{AF}{FB} = \frac{AQ}{QG} \cdot \frac{CG}{BC}$.

(2p) **g)** Să se arate că $\frac{AQ}{QG} = \frac{AE}{EC} + \frac{AF}{FB}$.

SUBIECTUL IV (20p)

(4p) **a)** Să se verifice identitatea $xy - \frac{1}{xy} - \left(x + y - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right) = \frac{(x-1)(y-1)(xy-1)}{xy}$, $\forall x, y \in \mathbf{R}^*$.

(4p) **b)** Să se rezolve în $\mathbf{R}^*$ ecuația $x^3 - \frac{1}{x^3} = x + x^2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$.

(4p) **c)** Să se arate că $ab - \frac{1}{ab} \geq a + b - \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$, $\forall a, b \in [1, \infty)$.

(2p) **d)** Să se arate că, dacă $x > y > 0$, atunci $x - \frac{1}{x} > y - \frac{1}{y}$.

(2p) **e)** Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall a_1, a_2, ..., a_n \in [1, \infty)$,

avem $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n - \frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n} \geq a_1 + a_2 + ... + a_n - \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} - ... - \frac{1}{a_n}$.

(2p) **f)** Să se arate că, dacă $a, b, c \in [0, \infty)$, atunci

$2^{a+b+c} - 2^{-a-b-c} \geq 2^a + 2^b + 2^c - 2^{-a} - 2^{-b} - 2^{-c}$.

(2p) **g)** Să se arate că, dacă $a \in [1, \infty)$, atunci $a^n - \frac{1}{a^n} \geq n\left(a - \frac{1}{a} \right)$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.